

CONCURSO VESTIBULAR PUC-RIO 2023

2º DIA - TARDE

GABARITO

GRUPO 3

**PROVAS OBJETIVAS DE CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DE CIÊNCIAS HUMANAS E
PROVA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA**

14 de outubro de 2022

CLASSIFICAÇÃO PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

18

Com massas atômicas referidas ao isótopo 12 do carbono

VIIIA

IA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	VIIIA
1 H 1,0079 HIDROGÊNIO	2 He 4,0026 HÉLIO	3 Li 6,941(2) LÍTIO	4 Be 9,0122 BERÍLIO	5 B 10,811(5) BORO	6 C 12,011 CARBONO	7 N 14,007 NITROGÊNIO	8 O 15,999 OXIGÊNIO	9 F 18,998 FLUOR	10 Ne 20,180 NEÔNIO	11 Na 22,990 SÓDIO	12 Mg 24,305 MAGNÉSIO	13 Al 26,982 ALUMÍNIO	14 Si 28,086 SILÍCIO	15 P 30,974 FOSFORO	16 S 32,066(6) ENXOFRE	17 Cl 35,453 CLORO	18 Ar 39,948 ARGÔNIO
19 K 39,098 POTÁSSIO	20 Ca 40,078(4) CÁLCIO	21 Sc 44,956 ESCÂNDIO	22 Ti 47,867 TÍTÂNIO	23 V 50,942 VANÁDIO	24 Cr 51,996 CRÔMIO	25 Mn 54,938 MANGANÊS	26 Fe 55,845(2) FERRO	27 Co 58,933 COBALTO	28 Ni 58,693 NÍQUEL	29 Cu 63,546(3) COBRE	30 Zn 65,39(2) ZINCO	31 Ga 69,723 GÁLIO	32 Ge 72,61(2) GERMÂNIO	33 As 74,922 ARSENÍO	34 Se 78,96(3) SELENÍO	35 Br 79,904 BROMO	36 Kr 83,80 CRÍPTÔNIO
37 Rb 85,468 RUBÍDIO	38 Sr 87,62 ESTRÔNCIO	39 Y 88,906 ÍTRIO	40 Zr 91,224(2) ZIRCONÍO	41 Nb 92,906 NÍBÓIO	42 Mo 95,94 MOLIBDÊNIO	43 Tc 98,906 TECNÉCIO	44 Ru 101,07(2) RUTÊNIO	45 Rh 102,91 RÓDIO	46 Pd 106,42 PALÁDIO	47 Ag 107,87 PRATA	48 Cd 112,41 CÁDMIO	49 In 114,82 ÍNDIO	50 Sn 118,71 ESTANHO	51 Sb 121,76 ANTIMÔNIO	52 Te 127,60(3) TELÚRIO	53 I 126,90 IODO	54 Xe 131,29(2) XENÔNIO
55 Cs 132,91 CÉSIO	56 Ba 137,33 BÁRIO	57 a 71 La-Lu 178,49(2) HAFNIO	72 Hf 178,49(2) HAFNIO	73 Ta 180,95 TÂNTALO	74 W 183,84 TUNGSTÊNIO	75 Re 186,21 RÊNIO	76 Os 190,23(3) ÓSMIO	77 Ir 192,22 ÍRÍDIO	78 Pt 195,08(3) PLATINA	79 Au 196,97 OURO	80 Hg 200,59(2) MERCÚRIO	81 Tl 204,38 TÁLIO	82 Pb 207,2 CHUMBO	83 Bi 208,98 BISMUTO	84 Po 209,98 POLÔNIO	85 At 209,99 ASTÁTO	86 Rn 222,02 RADÔNIO
87 Fr 223,02 FRÂNCIO	88 Ra 226,03 RÁDIO	89 a 103 Ac-Lr 262 RUTHERFÓRDIO	104 Rf 261 RUTHERFÓRDIO	105 Db 262 DÚBNIÓ	106 Sg 262 SEABÓRGIO	107 Bh 262 BÓHRIO	108 Hs 262 HASSÍO	109 Mt 262 METNÉRIO	110 Uun 262 UNUNÍLIO	111 Uuu 262 UNUNÍLIO	112 Uub 262 UNUNBÍO	113 Nh 262 UNUNÍLIO	114 Fl 262 UNUNÍLIO	115 Mc 262 UNUNÍLIO	116 Lv 262 UNUNÍLIO	117 Ts 262 UNUNÍLIO	118 Og 262 UNUNÍLIO

Série dos Lantanídeos

57 La 138,91 LANTÂNIO	58 Ce 140,12 CÉRIO	59 Pr 140,91 PRASEODÍMIO	60 Nd 144,24(3) NEODÍMIO	61 Pm 146,92 PROMÉCIO	62 Sm 150,36(3) SAMÁRIO	63 Eu 151,96 EURÓPIO	64 Gd 157,25(3) GADOLÍNIO	65 Tb 158,93 TÉRBIO	66 Dy 162,50(3) DISPRÓSIO	67 Ho 164,93 HÓLMIO	68 Er 167,26(3) ERBÍO	69 Tm 168,93 TÚLIO	70 Yb 173,04(3) ÍTERBIO	71 Lu 174,97 LUTÉCIO
--------------------------------	-----------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------	----------------------------------	-------------------------------	------------------------------------	------------------------------	------------------------------------	------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	----------------------------------	-------------------------------

Série dos Actinídeos

89 Ac 227,03 ACTÍNIO	90 Th 232,04 TÓRIO	91 Pa 231,04 PROTÁCTÍNIO	92 U 238,03 URÂNIO	93 Np 237,05 NETÚNIO	94 Pu 239,05 PLUTÓNIO	95 Am 241,06 AMÉRICIO	96 Cm 244,06 CÚRIO	97 Bk 249,08 BERQUÉLIO	98 Cf 252,08 CALIFÓRNIO	99 Es 252,08 EINSTEÍNIO	100 Fm 257,10 FÉRMIO	101 Md 258,10 MENDELÉVIO	102 No 259,10 NOBELÍO	103 Lr 262,11 LAURÊNCIO
-------------------------------	-----------------------------	-----------------------------------	-----------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	---------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	-------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

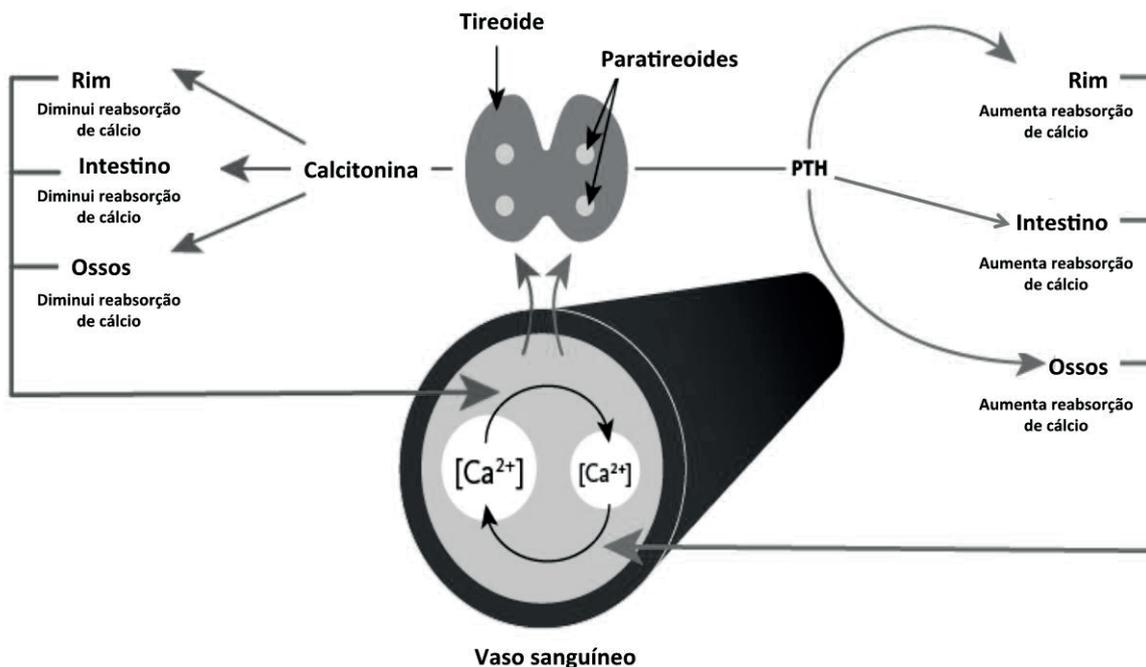
Número Atômico	Símbolo
Nome do Elemento	Massa Atômica

Massa atômica relativa. A incerteza no último dígito é ± 1, exceto quando indicado entre parênteses.

CIÊNCIAS DA NATUREZA

1

A Figura abaixo representa o metabolismo de cálcio em humanos.



Disponível em: <https://www.vegafarma.pt/calcio-no-organismo-humano/>. Acesso em: 13 de ago. 2022.

Sobre a regulação da homeostase de cálcio no sangue, verifica-se que a

- (A) baixa concentração de cálcio no sangue induz a produção do hormônio PTH pela glândula paratireoide, e o PTH aumenta a reabsorção de cálcio nos rins e a absorção de cálcio no intestino.
- (B) baixa concentração de cálcio no sangue induz a produção do hormônio calcitonina pela glândula paratireoide, e a calcitonina aumenta a reabsorção de cálcio nos rins e a absorção de cálcio no intestino.
- (C) baixa concentração de cálcio no sangue induz a produção do hormônio calcitonina pela glândula tireoide, e a calcitonina diminui a reabsorção de cálcio nos rins e a absorção de cálcio no intestino.
- (D) alta concentração de cálcio no sangue induz a produção do hormônio PTH pela glândula tireoide, e o PTH diminui a reabsorção de cálcio nos rins e a absorção de cálcio no intestino.
- (E) alta concentração de cálcio no sangue induz a produção do hormônio calcitonina pela glândula paratireoide, e a calcitonina aumenta a reabsorção de cálcio nos rins e a absorção de cálcio no intestino.

2

As principais células envolvidas no processo de cicatrização da pele, que migram para a região danificada e produzem muitas fibras colágenas, promovendo o fechamento do corte, denominam-se

- (A) macrófagos
- (B) plasmócitos
- (C) fibroblastos
- (D) mastócitos
- (E) adipócitos

3

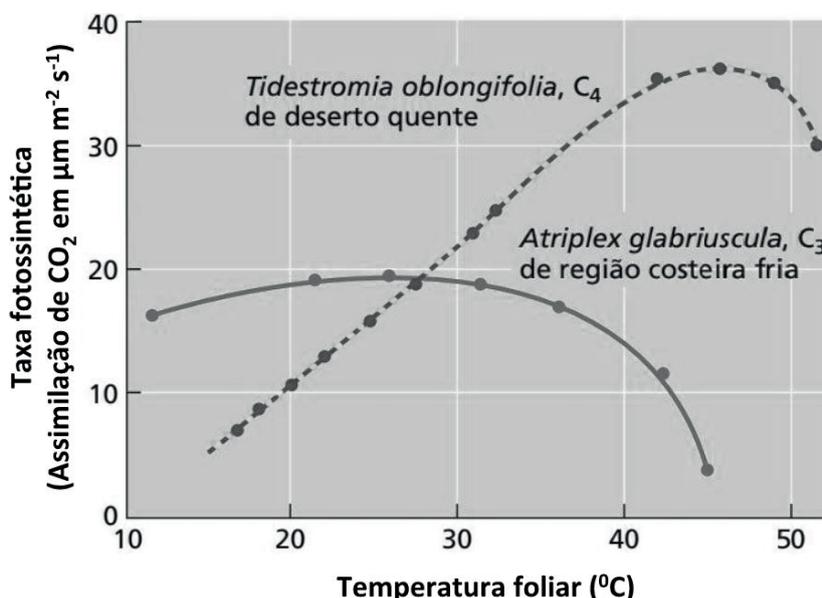
Os animais vertebrados conquistaram o ambiente terrestre, provavelmente, no período Devoniano tardio. No estabelecimento da vida em terra, foram necessárias diversas adaptações evolutivas para a sobrevivência e para a reprodução fora da água.

São, respectivamente, características de vertebrados terrestres que contribuíram de forma direta para a sobrevivência e para a reprodução desses animais em terra:

- (A) penas e respiração pulmonar
- (B) quatro membros locomotores e brânquias
- (C) respiração pulmonar e ovo amniótico
- (D) respiração pulmonar e quatro membros locomotores
- (E) brânquias e quatro membros locomotores

4

O gráfico abaixo demonstra o efeito da temperatura sobre a taxa fotossintética de duas espécies da família Amaranthacea. Uma das espécies analisadas é *Atriplex glabriuscula* (linha contínua), comumente encontrada em ambientes costeiros frios, e a outra é *Tidestromia oblongifolia* (linha tracejada), característica de um ambiente desértico quente.



TAIZ & ZEIGER, *Fisiologia e Desenvolvimento Vegetal*. 6 Ed. Adaptado.

A partir da análise do gráfico, conclui-se que

- (A) as duas plantas apresentam a mesma temperatura ótima para a fotossíntese.
- (B) acima da temperatura ótima, ambas as espécies apresentam diminuição da taxa fotossintética devido à desnaturação das enzimas participantes nesse processo.
- (C) a *Atriplex glabriuscula* apresenta temperatura ótima da fotossíntese maior do que a *Tidestromia oblongifolia*.
- (D) para ambas as espécies, a taxa fotossintética só aumenta em temperaturas maiores do que a temperatura ótima.
- (E) em temperaturas abaixo de 20 °C, a *Tidestromia oblongifolia* apresenta taxa fotossintética maior do que a da *Atriplex glabriuscula*.

5

Em uma população, em equilíbrio de Hardy-Weinberg, o alelo dominante de um locus autossômico dialélico apresenta frequência 0,7.

Qual será a frequência esperada de heterozigotos para esse locus?

- (A) 1,40
- (B) 0,49
- (C) 0,42
- (D) 0,21
- (E) 0,09

6

Considere a notícia veiculada pela revista Galileu, em 28 de janeiro de 2022.

Apesar de ser uma área intocada de floresta, um trecho da Amazônia peruana superou regiões industriais ao redor do mundo e tornou-se o lugar que apresenta os níveis mais altos de poluição atmosférica por mercúrio. A poluição em questão é gerada pela mineração ilegal de ouro, que está por trás de níveis excepcionalmente altos de mercúrio rastreados pela Estação Biológica Los Amigos, no sul do Peru. Aves na área têm até 12 vezes mais do metal do que as moradoras de locais menos poluídos.

Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Meio-Ambiente/noticia/2022/01/recordes-mundial-de-poluicao-por-mercuro-e-registrado-na-amazonia-peruana.html>. Acesso em: 10 ago. 2022. Adaptado.

O processo pelo qual os animais adquirem mercúrio e outros metais pesados do ambiente por meio da cadeia alimentar, impedindo a eliminação desses elementos de seus organismos de maneira eficiente, denomina-se

- (A) bioacumulação
- (B) biorremediação
- (C) biodiversidade
- (D) biodegradação
- (E) biodisponibilização

7

Considere as afirmativas abaixo acerca dos animais.

- I – Os animais são seres aeróbios.
- II – Os animais são seres heterótrofos por absorção.
- III – Os animais possuem a molécula de glicogênio como reserva de energia.
- IV – Os animais se reproduzem de forma sexuada e assexuada.
- V – Os animais apresentam célula eucarionte, com parede celular de quitina.

Está correto **APENAS** o que se afirma em

- (A) I, II e IV
- (B) I, III e IV**
- (C) I, III e V
- (D) II, III e IV
- (E) II, III e V

8

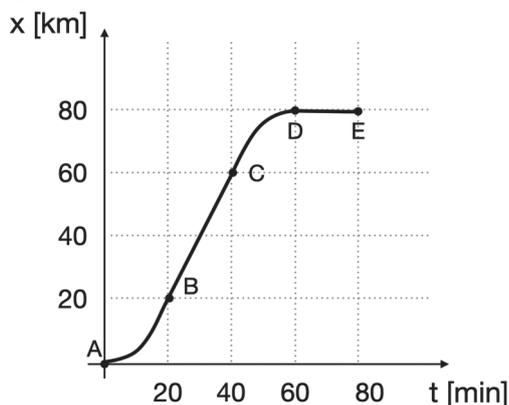
A replicação de um vírus só é possível dentro de uma célula viva porque os vírus não possuem aparato enzimático autossuficiente, o que os torna parasitas intracelulares obrigatórios.

Morfologicamente, os vírus, na sua essência, são constituídos de

- (A) membrana celular e núcleo
- (B) membrana celular e mitocôndrias
- (C) membrana celular e capsídeo
- (D) material genético e capsídeo**
- (E) ácidos nucleicos e mitocôndrias

9

O gráfico descreve a posição de um carro ao longo do tempo, em uma estrada sem curvas. Os segmentos BC e DE no gráfico são retilíneos.



Analisando-se o gráfico, conclui-se que

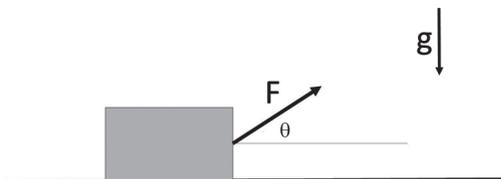
- (A) a velocidade do carro no ponto B é 60 km/h.
- (B) o carro tem velocidade crescente entre os pontos A e B e entre os pontos C e D.
- (C) a velocidade no ponto D é 80 km/h.
- (D) entre os pontos D e E, o carro se desloca com velocidade constante.
- (E) a velocidade média do carro entre os pontos A e E é 60 km/h.**

RASCUNHO



10

Uma caixa de massa M se move com velocidade constante ao longo de um plano horizontal, ao ser puxada por uma força F constante que faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal, como na figura. A força F tem módulo igual a $1/2$ do peso da caixa.



Nessas condições, o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o plano é:

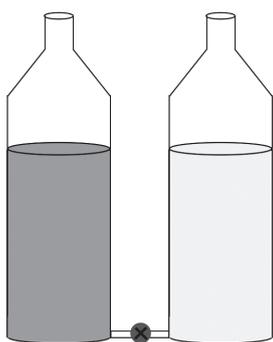
- (A) 4
- (B) 3
- (C) $1/2$
- (D) $1/\sqrt{3}$
- (E) 0

Dado:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= 1/2; \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

11

Dois garrafões idênticos são mantidos abertos à atmosfera e estão conectados através de um tubo muito fino. A válvula que os conecta se encontra inicialmente fechada, como mostrado na figura. O garrafão da esquerda é preenchido por um óleo de densidade $0,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, e o da direita é preenchido com água, cuja densidade é $1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, até ambos terem seus líquidos numa altura de 1,0 metro em relação ao fundo dos garrafões. A válvula, então, é aberta.



Após um tempo suficiente para que o sistema fique estático, qual é a altura final, em metros, da coluna de água à direita em relação ao fundo do garrafão?

- (A) 0,8
- (B) 0,9
- (C) 1,0
- (D) 1,2
- (E) 1,8

Dado:

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

12

Uma placa fina tem distribuição de massa uniforme possuindo a forma de um triângulo isósceles de vértices ABC , com $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Seja O o centro de massa desse triângulo.

O ângulo \widehat{ABO} , em graus, vale

- (A) 90
- (B) 60
- (C) 45
- (D) 30
- (E) 15

13

Em um calorímetro perfeito são colocados 10 g de gelo a 0°C e 10 g de água a 80°C .

Qual é, em Celsius, a temperatura final do sistema?

- (A) 80
- (B) 73
- (C) 40
- (D) 20
- (E) 0

Dado:

$$\begin{aligned} c_{\text{água}} &= 1,0 \text{ cal/g}^\circ\text{C} \\ L_{\text{fusão água}} &= 80 \text{ cal/g} \end{aligned}$$

14

Da borda de um penhasco, Maria lança uma pedra horizontalmente para a frente. A pedra cai de uma altura de 45 m e aterrissa a uma distância horizontal de 11,4 m do ponto de lançamento.

Desprezando efeitos de resistência do ar, com qual velocidade, em m/s, a pedra foi lançada por Maria?

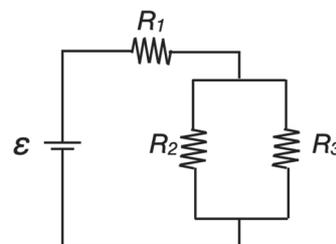
- (A) 3,8
- (B) 4,6
- (C) 5,7
- (D) 6,3
- (E) 7,6

Dado:

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

15

Um circuito elétrico é armado com uma fonte e três resistores com resistências $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$ e $R_3 = 4,0 \text{ k}\Omega$, como mostrado na figura.



Sabendo que a corrente que passa por R_3 é 2,0 mA, qual é, em volts, a voltagem da fonte?

- (A) 8
- (B) 12
- (C) 14
- (D) 16
- (E) 18

16

Três partículas pontuais idênticas de carga elétrica Q estão fixas sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado L .

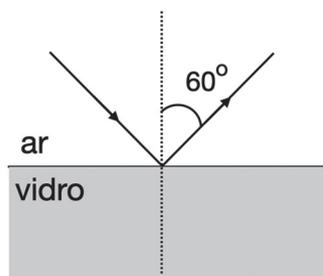
Sendo k a constante de Coulomb, qual é o módulo da força sentida por qualquer uma delas, devido às outras duas?

- (A) $k Q^2/L^2$
- (B) $2k Q^2/L$
- (C) $2k Q^2/L^2$
- (D) $\sqrt{3}k Q^2/L$
- (E) $\sqrt{3}k Q^2/L^2$

Dado:
 $\text{sen } 30^\circ = 1/2$;
 $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

17

Ao incidir um raio de luz em uma interface ar/vidro, como na figura, verifica-se que o ângulo de reflexão em relação à normal é 60° .



Considere as seguintes afirmações:

- I – O raio refratado faz um ângulo maior que 60° em relação à normal.
- II – Para essas condições, ocorre o fenômeno de reflexão total.
- III – A luz se propaga dentro do vidro com uma velocidade igual a $2/3$ daquela no ar.

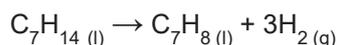
É correto **APENAS** o que se afirma em

- (A) I
- (B) III
- (C) I e II
- (D) I e III
- (E) II e III

Dado:
 índice de refração do ar = 1,0
 índice de refração do vidro = 1,5

18

O processo de melhoria do índice de octanas de combustível pode ser exemplificado pela reação abaixo.



Em termos percentuais, o valor da perda de massa de hidrocarboneto nesse processo é, aproximadamente,

- (A) 2%
- (B) 6%
- (C) 8%
- (D) 12%
- (E) 15%

Dado:
 $M(C) = 12 \text{ g mol}^{-1}$
 $M(H) = 1 \text{ g mol}^{-1}$

RASCUNHO



19

A reação de Diels-Alder é muito importante em Química Orgânica, pois permite a obtenção de derivados de ciclo-hexeno a partir da reação entre um dieno e um alceno, conforme o esquema abaixo.



Entalpias de ligação (kJ mol ⁻¹)	
C-C	348
C=C	612

Considerando-se os dados da tabela, o valor da variação de entalpia da reação, em kJ mol⁻¹, é

- (A) - 168
 (B) - 264
 (C) - 386
 (D) + 136
 (E) + 342

20

A uma alíquota de 100 mL de solução aquosa, com pH 2, foi adicionada e dissolvida uma massa suficiente de carbonato de potássio para que a solução fosse neutralizada, conforme a reação simplificada abaixo.



O valor aproximado, em gramas, da massa de carbonato de potássio adicionada a essa solução para neutralizá-la foi

- (A) 0,03
 (B) 0,05
 (C) 0,07
 (D) 0,10
 (E) 0,14

Dado:
 $M(\text{K}_2\text{CO}_3) = 138 \text{ g mol}^{-1}$

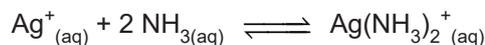
21

Um laboratorista necessita neutralizar uma amostra aquosa ácida antes de proceder ao descarte seguro. Para realizar essa neutralização, dentre os cinco reagentes abaixo, presentes em sua bancada, ele escolheu corretamente o

- (A) NaCl
 (B) HNO₃
 (C) CH₃COOH
 (D) CaCO₃
 (E) NH₄Cl

22

O reagente de Tollens é usado em análise orgânica para diferenciar aldeídos de cetonas. O reagente é preparado com íons prata em meio amoniacal, e a equação de formação do íons Ag(NH₃)₂⁺ é dada por:



A equação da constante de equilíbrio K da reação de formação da espécie Ag(NH₃)₂⁺ é

- (A) $\frac{[\text{Ag}^+]}{[\text{NH}_3] [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}$
 (B) $\frac{[\text{NH}_3]^2 [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+]}$
 (C) $\frac{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]}{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}$
 (D) $\frac{[\text{Ag}^+] [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{NH}_3]^2}$

(E) $\frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]^2}$

23

O lítio (Li) é um elemento alcalino relativamente raro, cuja demanda tem crescido por conta de seu uso nas baterias dos carros elétricos e híbridos.

Sobre esse elemento, verifica-se que o ⁶Li e o ⁷Li

- (A) são isótonos.
 (B) têm o mesmo número de massa.
 (C) diferem no número de nêutrons.
 (D) têm números atômicos diferentes.
 (E) são isóbaros.

24

O etilenoglicol (etan-1,2-diol), o *n*-butano, o *n*-propanol e a acetona (propanona) são compostos orgânicos que apresentam diversas aplicações industriais.

Dispondo-se essas moléculas por ordem crescente de seus pontos de ebulição, tem-se a seguinte sequência:

- (A) etilenoglicol, *n*-butano, *n*-propanol, acetona
 (B) *n*-butano, acetona, etilenoglicol, *n*-propanol
 (C) *n*-butano, acetona, *n*-propanol, etilenoglicol
 (D) acetona, *n*-butano, *n*-propanol, etilenoglicol
 (E) acetona, etilenoglicol, *n*-butanol, *n*-propanol

25

Os elementos sódio (Na) e flúor (F) são os elementos que compõem o fluoreto de sódio, utilizado, em pequenas quantidades, na composição de algumas pastas de dentes e enxaguantes bucais, com o objetivo de prevenção de cáries.

Os subníveis mais energéticos dos elementos sódio e flúor, no estado fundamental, são, respectivamente,

- (A) 3s e 3p
- (B) 2s e 2p
- (C) 3p e 2p
- (D) 2p e 1s
- (E) 3s e 2p

CIÊNCIAS HUMANAS

26

Para a delimitação de áreas geográficas com diferentes índices de precipitação durante determinado período, são utilizadas isolinhas denominadas

- (A) isóbaras
- (B) isoietas
- (C) isóbatas
- (D) isoípsas
- (E) isotermas

27

Sobre os processos de reposicionamento político-administrativo das unidades federadas brasileiras, apresentadas no cartograma a seguir, verifica-se que o(s)



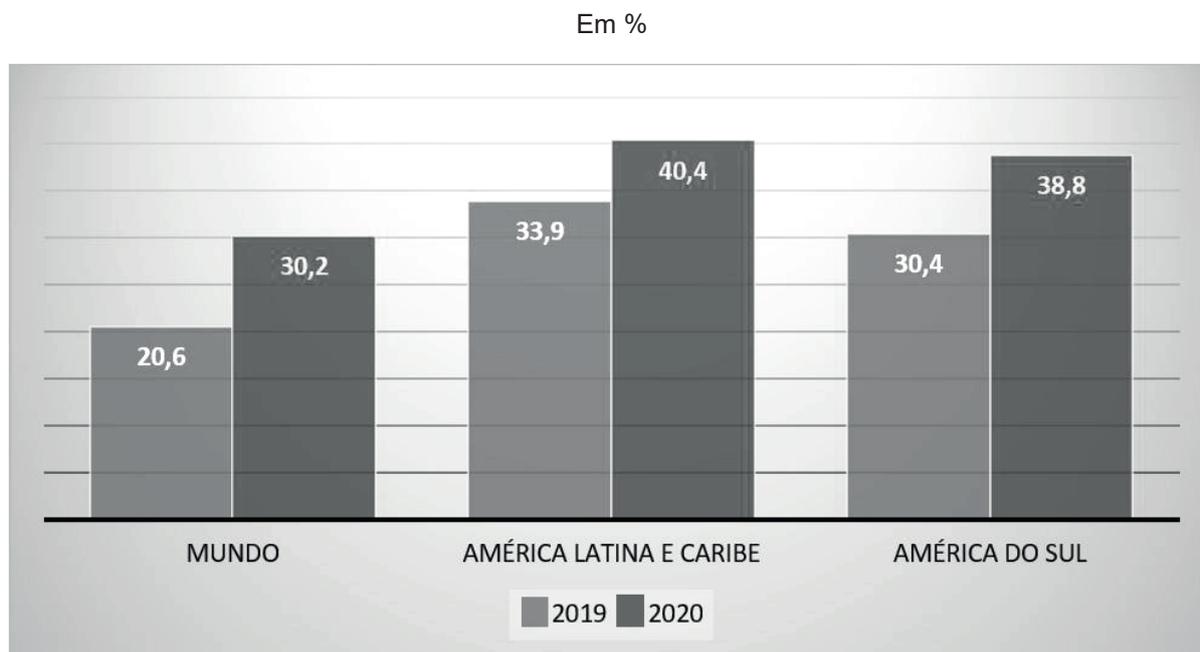
Disponível em: <https://twitter.com/Geopizza/status/1275115041700737024/photo/1>. Acesso em: 04 jun 2022.

- (A) estado de Tocantins é a mais jovem unidade federada do Brasil (1988), após sua emancipação do Mato Mato Grosso do Sul, em 1977.
- (B) estado do Mato Grosso emancipou-se do Mato Grosso do Sul, em 1988, perdendo o controle sobre o Distrito Federal em 1960.
- (C) Distrito Federal ganhou *status* de unidade federada em 1960, quando deixou a sua condição de vila no interior do Brasil.
- (D) atuais estados brasileiros de Rondônia, de Roraima e do Amapá foram elevados à categoria de território, em 1943.
- (E) territórios do Acre, de Roraima e de Rondônia foram elevados à categoria de estados federados brasileiros, em 1943.

RASCUNHO

28

Observe a imagem a seguir:



Disponível em: <https://www.comciencia.br/a-longa-noite-da-fome/>. Acesso em: 24 jul. 2022. Adaptado.

Com base nessa imagem, verifica-se que a insegurança alimentar – moderada e severa – entre 2019 e 2020,

- (A) aumentou mais na América do Sul do que na América Latina e Caribe.
- (B) disparou pelo planeta, apesar do crescimento reduzido na América Latina e Caribe.
- (C) estagnou-se na Europa e nos EUA, áreas menos afetadas pelos problemas alimentares no mundo.
- (D) equilibrou-se na América do Sul, pela melhoria das condições agroalimentares no Brasil.
- (E) subiu gradualmente pelo mundo devido ao poder econômico da União Europeia e do Japão.

29

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), uma pandemia ocorre quando um(a)

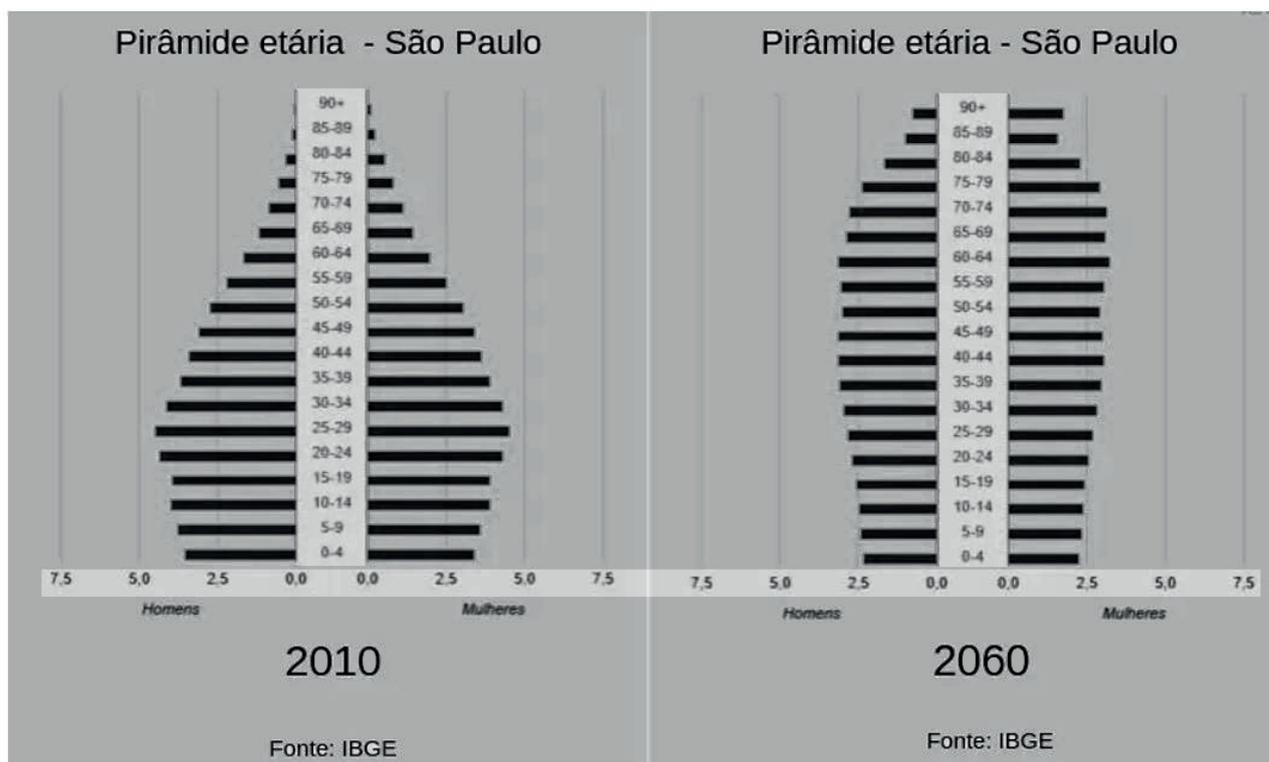
- (A) fluxo virótico gerador de doença previamente existente progride velozmente para diversos espaços geográficos.
- (B) surto se espalha descontroladamente por uma região através do ar atmosférico, sem nenhum controle humano.
- (C) endemia de espécie animal se dissemina pelo planeta contaminando humanos, devido a problemas ambientais.
- (D) epidemia em uma região se espalha por diferentes continentes, com transmissão sustentada de pessoa para pessoa.
- (E) irrupção repentina de casos de doença virótica em uma região do planeta se manifesta por um período determinado.

30

Os sistemas agroflorestais (SAFs) visam ao equilíbrio entre os interesses econômicos e a sustentabilidade ambiental, buscando melhor relação sociedade-natureza, como no exemplo da

- (A) produção de bens primários, com a preservação de espécies nativas.
- (B) densificação demográfica, com a redução da geração de resíduos sólidos.
- (C) ruralização da produção agropecuária, com o aumento da produtividade agrícola.
- (D) ampliação da produtividade no campo, com a redução do tempo de cultivo dos solos.
- (E) substituição de espécies nativas, com a introdução de outras mais rentáveis comercialmente.

31



Fonte: IBGE. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 21 jul. 2022.

Levando-se em consideração os perfis etários das pirâmides apresentadas acima, as políticas públicas adequadas estão expressas em:

- (A) 2010 – construção de novas escolas do ensino fundamental /
2060 – abertura de novas estradas de rodagem.
- (B) 2010 – investimentos em escolas profissionalizantes e secundárias /
2060 – ampliação de centros de lazer para a terceira idade.**
- (C) 2010 – expansão de casas de repouso e asilos /
2060 – financiamentos ampliados para a educação básica.
- (D) 2010 – criação de cursos de graduação de Engenharia do Trânsito /
2060 – ampliação das escolas de educação básica.
- (E) 2010 – estímulo à profissionalização de jovens e adultos /
2060 – formação ampliada de obstetras.

32

No Código Nacional de Trânsito brasileiro, a legislação é muito clara em relação à importância das vias e sua classificação para a circulação nos espaços urbanos e rurais do país.

Dentre os pontos de conhecimento geográfico necessários na legislação, as estradas vicinais são destacadas pela importância que têm para

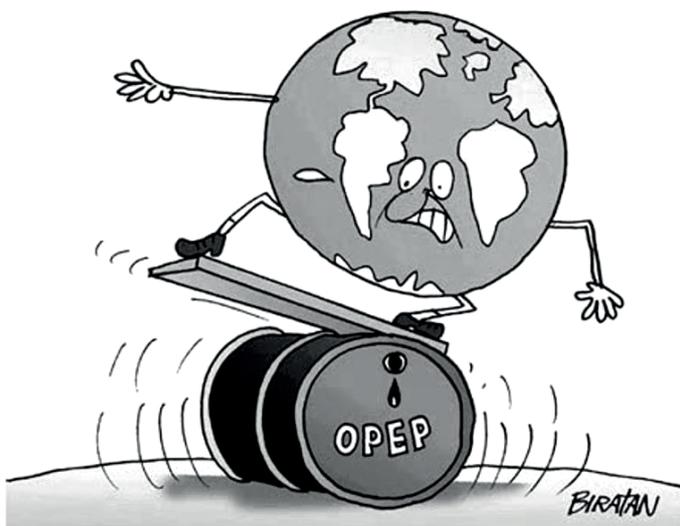
- (A) classificar o grau de conexão entre os estados.
- (B) proporcionar acesso às propriedades rurais.**
- (C) conectar as rodovias federais às estaduais.
- (D) diferenciar as rodovias das vias sem asfalto.
- (E) interligar os espaços rurais e urbanos.



33

Observe a charge a seguir:

O equilíbrio energético do planeta.



Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/10535312>. Acesso em: 04 jun. 2022.

Em relação à charge selecionada, entende-se que a organização apresentada

- (A) fundamentou o equilíbrio de forças entre as superpotências durante a Guerra Fria, por ser uma instituição originada da ONU e de instituições supranacionais.
- (B) reinventou a geopolítica energética mundial ao longo do século XX, pois retirou dos países periféricos o domínio sobre o comércio internacional de *commodities*.
- (C) restabeleceu a ordem mundial após a Segunda Guerra, já que foi vital para o fim do imperialismo europeu nos continentes africano e asiático, a partir de 1950.
- (D) monopolizou o sistema energético do planeta em 1960, pois os seus países fundadores eram detentores da totalidade da produção mundial de petróleo.
- (E) **causou mudanças mundiais no processo de exploração e comercialização de petróleo, desde 1960, ao combater o oligopólio de empresas de países centrais.**

34

Bacias hidrográficas são formadas por porções delimitadas de áreas drenadas por um rio principal e seus afluentes. Estes escoam na direção à porção mais baixa da área topográfica das bacias, seguindo o padrão do relevo onde são delimitadas.

O que separa uma bacia hidrográfica de outra são os divisores de água, como as formas de relevo exibidas a seguir, **EXCETO**

- (A) morros
- (B) serras
- (C) **taludes**
- (D) chapadas
- (E) planaltos

35

‘As terras raras são um conjunto de elementos químicos, normalmente encontrados na natureza, misturados a minérios, de difícil extração – daí o nome –, mas com características peculiares, como magnetismo intenso e absorção e emissão de luz’. (...)

Disponível em: <https://jornal.usp.br/ciencias/valiosas-e-versateis-pesquisas-com-terras-raras-mostram-caminho-para-criar-cadeia-productiva-no-brasil/>. Acesso em: 21 jul. 2022. Adaptado.

Atualmente, o Brasil tem a segunda maior reserva mundial conhecida de terras raras, porém essa riqueza não é explorada no país devido à(ao)

- (A) dimensão da cadeia industrial nacional, que já ultrapassou essa fase da modernização produtiva, deixando aos países periféricos a sua exploração.
- (B) preservação ambiental das areias litorâneas e próximas aos vulcões extintos, onde se localizam as unidades de conservação.
- (C) controle imposto pelo Estado, que os caracteriza como estratégicos para a segurança nacional.
- (D) **custo da tecnologia de exploração e separação dos seus elementos, o que obriga a sua importação para o uso industrial.**
- (E) alto teor de radioatividade emitido, o que limita a capacidade de extração das areias monazíticas do litoral.

36

Considere a seguinte passagem da **Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão - 1789**:

Art.1.º - Os homens nascem e são livres e iguais em direitos. As distinções sociais só podem ter como fundamento a utilidade comum.

Art. 2.º - A finalidade de toda associação política é a preservação dos direitos naturais e imprescritíveis do homem. Esses direitos são a liberdade, a prosperidade, a segurança e a resistência à opressão.

Disponível em: <https://br.ambafrance.org/A-Declaracao-dos-Direitos-do-Homem-e-do-Cidadao>. Acesso em: 16 set. 2022.

A partir da leitura do texto acima, verifica-se que um dos objetivos da Revolução Francesa foi:

- (A) diminuir o poder da burguesia sobre os camponeses e trabalhadores urbanos, garantindo-lhes direitos trabalhistas, vistos como naturais.
- (B) aumentar o controle da realeza sobre a opressão praticada pelos senhores sobre os escravizados, que, assim, poderiam resistir à exploração.
- (C) **garantir a igualdade de direitos a todos os cidadãos, independentemente de sua origem social, negando a ideia de que os reis eram indicados por Deus.**
- (D) preservar os direitos naturais da burguesia francesa de explorar as terras da nobreza, assim como usufruir do trabalho dos servos.
- (E) transformar os bens privados em bens de utilidade comum, garantindo igualdade social e maior controle do Estado.

37

A obra abaixo, realizada por Hyacinthe Rigaud, entre 1700 e 1701, representa o rei francês Luís XIV.



Considerando a imagem, pode-se concluir que a obra

- (A) apresenta uma crítica ao Estado francês, uma vez que o rei foi representado de forma frívola e exagerada.
- (B) glorifica a figura real como uma tentativa de igualá-la às imagens de santos e dar ao rei uma aura religiosa.
- (C) exalta a figura do rei francês, uma vez que associa Luís XIV ao exercício absoluto do poder político.
- (D) ressalta elementos de um monarca passivo e sob controle dos setores burgueses.
- (E) identifica a figura do monarca à de um líder militar e conquistador, que daria prosseguimento ao expansionismo napoleônico.

38

Considere o texto a seguir, que define o conceito de Antropoceno.

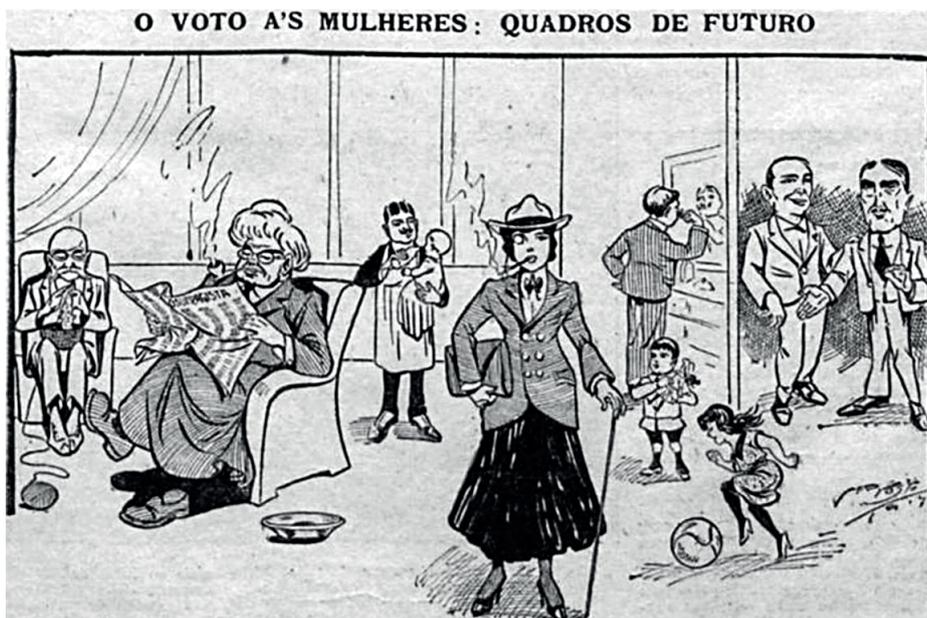
A palavra Antropoceno aparece hoje no título de centenas de livros e artigos científicos, em milhares de citações, e seu uso continua a crescer nos meios de comunicação. Referindo-se à época em que as ações humanas começaram a provocar alterações biofísicas em escala planetária, ela foi criada nos anos 1980 pelo biólogo norte-americano Eugene Stoermer e popularizada na década de 2000 por Paul Crutzen, o cientista atmosférico holandês e vencedor do Prêmio Nobel de Química de 1995. [...] Para marcar o início dessa nova era, eles propuseram simbolicamente o ano de 1784, o ano em que o inventor escocês James Watt aperfeiçoou a máquina a vapor.

Disponível em: <https://pt.unesco.org/courier/2018-2/antropoceno-os-desafios-essenciais-um-debate-cientifico>. Acesso em: 26 ago. 2022.

A partir da definição acima, pode-se associar o Antropoceno ao momento histórico conhecido como

- (A) Revolução Científica
- (B) Grandes Navegações
- (C) Tráfico Atlântico
- (D) Revolução Industrial
- (E) Reforma Protestante

39



O malho, Rio de Janeiro 23 de junho de 1917, p. 25. Disponível em: <https://www12.senado.leg.br/noticias/especiais/arquivo-s/para-criticos-do-voto-feminino-mulher-nao-tinha-intelecto-e-deveria-ficar-restrita-ao-lar>. Acesso em : 26 ago. 2022. Adaptado.

A partir da interpretação da charge acima, publicada pelo jornal **O malho**, em meio aos debates em torno da possibilidade de concessão do direito de voto às mulheres em 1917, pode-se concluir que a presença feminina na vida política era vista como

- (A) necessária ao desenvolvimento econômico e ao progresso da democracia brasileira.
- (B) uma ameaça direta ao monopólio da ordem patriarcal na sociedade brasileira.**
- (C) o reconhecimento integral da luta das sufragistas brasileiras pelo direito ao voto universal.
- (D) uma adequação natural à realidade de igualdade de direitos inerente à vida republicana.
- (E) uma nova oportunidade de trabalho e conseqüente melhoria da renda familiar no Brasil.

40

ANO	Crescimento PIB (%)	Inflação (%)	Exportações US\$ Bilhões	Importações US\$ Bilhões	Dívida Externa US\$ Bilhões
1967	4	27	1,7	1,4	3,3
1968	10	27	1,9	1,9	3,8
1969	10	20	2,3	2,0	4,4
1970	10	16	2,7	2,5	5,3
1971	11	20	2,9	3,2	6,6
1972	12	20	4	4,2	9,5
1973	14	23	6,2	6,2	12,6
1974	8	35	8	12,6	17,2
1975	5	34	8,7	12,2	21,2

PRADO, L.; EARP, F. "Milagre" brasileiro: crescimento econômico acelerado, integração internacional e concentração de renda. In: DELGADO, L.; FERREIRA, J. **O Brasil republicano**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2003, v. 4, p.223. Adaptado.

O quadro acima apresenta números referentes à economia brasileira entre 1967 e 1975, período do chamado milagre econômico. Sobre esse período, verifica-se que o(a)

- (A) aceleração do crescimento econômico não deu sinais de esgotamento, revelando o acerto das medidas adotadas.
- (B) equilíbrio entre as exportações e as importações garantiu que a inflação se mantivesse controlada ao longo de todo o período.
- (C) crescimento do PIB abriu caminho para a redução das importações e a redução da dívida externa.
- (D) oferecimento de crédito fácil possibilitou que a balança comercial do país se mantivesse favorável até o ano de 1975.
- (E) crescimento alcançado, no milagre econômico, deixou como legado o aumento significativo da dívida externa brasileira.**

41



Como se observa na cronologia acima, o final do século XVIII e as primeiras décadas do século XIX foram um período de revoluções na Europa e na América. Elas trouxeram alterações políticas para o mundo ocidental, e novos países surgiram. A análise dos fatos ocorridos nesse período permite concluir que

- (A) a maioria das novas nações na América, a exemplo da primeira independência no continente, constituíram-se em repúblicas.
- (B) as revoluções de independência na América, assim como na Europa, não representaram mudanças políticas significativas.
- (C) os Estados Unidos promoveram a queda das monarquias na Europa, incentivando as revoluções nesse continente.
- (D) o movimento de independência do Haiti foi o único a receber apoio dos seus colonizadores, que defendiam o fim da escravidão.
- (E) a revolução de independência no Brasil foi seguida pela formação de uma república constitucional em sintonia com o ideário liberal da época.

42

Abaixo, são apresentados alguns dos pontos do Programa do Partido Nacional Socialista dos Trabalhadores Alemães.

[...]

4. Somente os membros do povo podem ser cidadãos do Estado. Só pode ser membro do povo aquele que possui sangue alemão, sem consideração de credo. Nenhum judeu, portanto, pode ser membro do povo.

5. Quem não é cidadão só pode viver na Alemanha como hóspede e deve submeter-se à legislação relativa a estrangeiros.

[...]

9. Todos os cidadãos devem possuir direitos e deveres iguais.

10. O primeiro dever de todo cidadão deve ser produzir, intelectual ou fisicamente.”

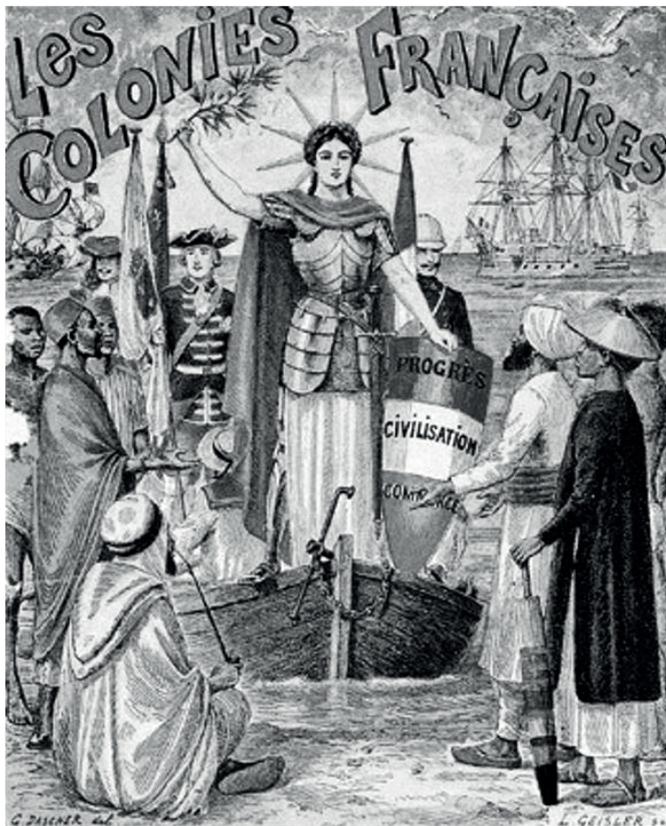
Programa do Partido Nacional Socialista dos Trabalhadores Alemães (24/02/1920). Apud. MARQUES, A; BERUTTI, F; FARIA, R. **História Contemporânea através de textos**. São Paulo: Contexto, 2013, p. 149.

Tendo como base o documento acima e as posteriores ações dos nazistas na Alemanha, assinale a alternativa correta.

- (A) Um dos pontos fundamentais do programa do partido nazista foi a defesa do exercício da cidadania plena por todos os indivíduos.
- (B) Embora tenham proposto a adoção de um governo centralizador, os nazistas garantiram as liberdades individuais democráticas.
- (C) Nos anos seguintes à publicação do documento, o caráter excludente manifestado contra a comunidade judaica foi estendido a outros grupos étnicos e políticos.
- (D) O programa do partido sinalizava para a possibilidade de se oferecer cidadania aos imigrantes que viviam no território alemão.
- (E) O texto do programa nazista descrevia um conjunto de direitos, mas não apontava quais seriam os deveres dos cidadãos.

43

Observe a imagem abaixo:



Capa de um livro escolar em 1900 (Tradução – No topo da imagem: “As colônias francesas”. No escudo: Progresso; Civilização; Comércio). Disponível em: <https://ensinarhistoria.com.br/o-fardo-do-homem-branco-exaltacao-do-imperialismo/>. Acesso em: 26 ago. 2022. Adaptado.

De acordo com a ilustração, destinada a alunos franceses, é possível perceber as motivações europeias para a expansão sobre os continentes asiático e africano.

Essa representação do imperialismo europeu permite afirmar que

- (A) o objetivo da expansão para esses continentes era criar um processo de desenvolvimento econômico baseado na formação de um parque industrial.
- (B) além da expansão do capital, justificava-se a dominação dessas regiões por uma missão, por meio da qual as raças superiores civilizam raças inferiores.
- (C) o comércio era a principal motivação para a expansão dos europeus, mas que acabou sendo substituída pelos ideais de civilização e progresso, promovidos pelos colonizados.
- (D) o tripé comércio, civilização e progresso era a base da expansão francesa, que beneficiou sobremaneira os asiáticos, em detrimento dos povos africanos.
- (E) um dos objetivos da colonização era conseguir mais mercados para os produtos agrícolas europeus com técnicas mais avançadas, para promover o progresso afro-asiático.

44

A varíola, que matou muitas pessoas durante 3 mil anos, foi a primeira doença infectocontagiosa erradicada pela vacinação. Ainda assim, mesmo embasadas por inúmeros estudos e experiências científicas, as vacinas continuavam a provocar reações diversas, do ponto de vista sanitário, das ideias e das atitudes. É assim na pandemia da Covid-19 e foi assim também no Rio de Janeiro de 1904, quando uma revolta popular explodiu por causa da Lei da Vacinação Obrigatória.

Sobre esse episódio, é correto afirmar que

- (A) o projeto de modernização da capital se realizou por via de uma reforma urbana, abrindo avenidas e derrubando cortiços, e por uma reforma sanitária, a fim de diminuir a grande mortalidade que atingia a população e os estrangeiros.
- (B) a Revolta da Vacina foi na verdade consequência das inúmeras mortes causadas pela aplicação indiscriminada da vacina contra a febre amarela, visto que não havia fundamentação científica para sua utilização.
- (C) apenas as mulheres e as crianças foram vacinadas, pois não havia vacina para todos, gerando grande revolta popular, liderada pelos chefes de família que desejavam ter o direito à vacina igualado ao de suas esposas e filhos.
- (D) a Revolta da Vacina se deu em função de uma promessa de vacinação universal não cumprida pelo governo federal; por isso, a população foi às ruas e entrou em confronto com a polícia, reivindicando o direito à vacina.
- (E) a Lei da Vacinação Obrigatória contrariava todas as experiências científicas da época, pois ficara provado que a inoculação do vírus no corpo humano aumentava as chances de morte por febre amarela.

45

Sobre o tráfico transatlântico de escravizados africanos ao longo do século XIX, constata-se o seguinte:

- (A) a violência do tráfico transatlântico e a retirada forçada de pessoas do continente não foram capazes de desequilibrar a organização social e política existente no território africano.
- (B) a partir da introdução da indústria cafeeira no Brasil e das transformações econômicas nos Estados Unidos, o tráfico internacional de escravos para essas nações diminuiu significativamente.
- (C) a determinação do fim do tráfico internacional de escravos em 1850, no Brasil, não interrompeu imediatamente a atividade do comércio atlântico de escravizados africanos.
- (D) nesse período, a atividade de compra e venda internacional se concentrou somente na costa ocidental da África, reforçando os traços comuns entre os escravizados ali embarcados.
- (E) durante o século XIX, o tráfico transatlântico de escravizados africanos foi todo direcionado ao Brasil, único destino final dessa atividade comercial.

PROVA DISCURSIVA DE
MATEMÁTICA

Questão 1 (Valor: 2,5 pontos)

Em cada item abaixo, determine o conjunto solução da equação ou inequação, ou seja, o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem cada equação ou inequação.

a) $\frac{1}{2} - \frac{x+3}{5} = \frac{4}{3}$

$$\frac{1}{2} - \frac{x+3}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{10} - \frac{2(x+3)}{10} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 5 - 2(x+3) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 5 - 2x - 6 = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2x - 1 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3(-2x - 1) = 8 \Leftrightarrow -6x - 3 = 8 \Leftrightarrow -6x = 11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}$$

b) $|5x - 2| \geq 1$

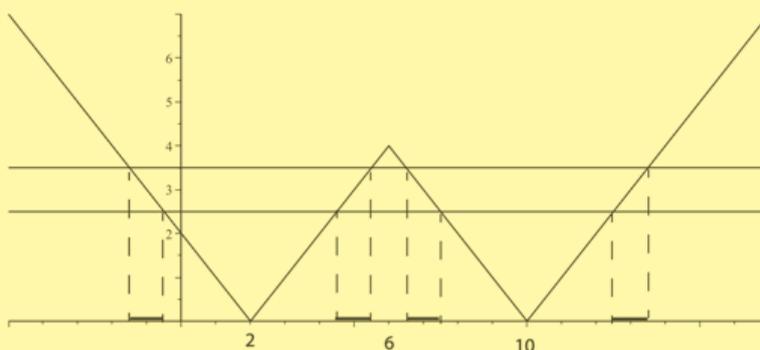
$$|5x - 2| \geq 1 \Leftrightarrow (5x - 2 \geq 1 \text{ ou } 5x - 2 \leq -1) \Leftrightarrow (x \geq \frac{3}{5} \text{ ou } x \leq \frac{1}{5}) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

c) $||x - 6| - 4| - 3| \leq 1/2$

Primeiro observamos que

$$||x - 6| - 4| - 3| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq |x - 6| - 4 - 3 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq |x - 6| - 4 \leq \frac{7}{2}$$

Esboçando a curva de equação $y = ||x - 6| - 4|$ e as retas horizontais de equações $y = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{7}{2}$, vemos os intervalos que formam o conjunto pedido:



Se $x \leq 2$, $|x - 6| - 4| = -x + 2$. Temos $-x + 2 = \frac{7}{2}$ se e só se $x = -\frac{3}{2}$. E $-x + 2 = \frac{5}{2}$ se e só se $x = -\frac{1}{2}$. O primeiro intervalo é $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Analogamente, os demais intervalos são $\left[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right]$, $\left[\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right]$ e $\left[\frac{25}{2}, \frac{27}{2}\right]$.

Logo, $x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right] \cup \left[\frac{25}{2}, \frac{27}{2}\right]$.

Questão 2 (Valor: 2,5 pontos)

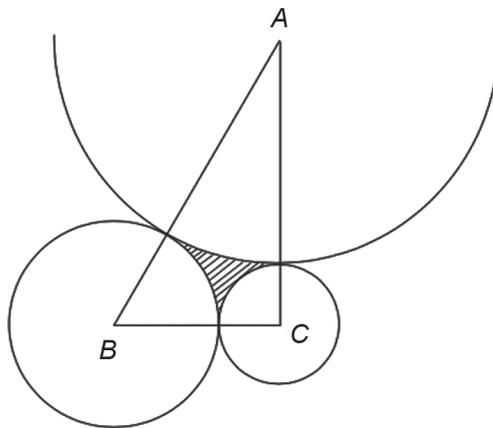
Seja ABC um triângulo retângulo em C . Sabe-se que o cateto BC mede 1 e que a hipotenusa AB mede 2.

a) Quanto mede o cateto AC ?

Pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow (2)^2 = AC^2 + (1)^2 \Leftrightarrow 4 = AC^2 + 1 \Leftrightarrow AC^2 = 3 \Leftrightarrow AC = \sqrt{3}$$

b) Traçam-se círculos de centros A, B, C e raios r_A, r_B, r_C que se tangenciam exteriormente, dois a dois, como mostrado na figura.



Calcule os raios r_A, r_B e r_C .

$$r_A + r_B = AB = 2 \quad (i)$$

$$r_B + r_C = BC = 1 \quad (ii)$$

$$r_A + r_C = AC = \sqrt{3} \quad (iii)$$

$$\text{Fazendo (i) - (ii) + (iii), obtemos: } 2r_A = 2 - 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow r_A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Fazendo (ii) - (iii) + (i), obtemos: } 2r_B = 1 - \sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow r_B = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Fazendo (ii) - (i) + (iii), obtemos: } 2r_C = 1 - 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow r_C = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

(Continua)

Questão 2 (continuação)

c) Considere a região R interior ao triângulo ABC e exterior aos três círculos descritos no item anterior, como indica a figura. Calcule a área da região R .

Primeiramente, como $\hat{C}=90^\circ=\frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}(\hat{A})=\frac{1}{2}$, segue que os ângulos internos do triângulo ABC são dados por:

$$\hat{A}=30^\circ=\frac{\pi}{6} \text{ e } \hat{B}=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

Então:

(i) área do setor circular dado pelo círculo de centro A:

$$\text{Área}(S(A)) = \frac{\pi \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi(1+\sqrt{3})^2}{48} = \frac{\pi(4+2\sqrt{3})}{48} = \frac{\pi(2+\sqrt{3})}{24}$$

(ii) área do setor circular dado pelo círculo de centro B:

$$\text{Área}(S(B)) = \frac{\pi \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi(3-\sqrt{3})^2}{24} = \frac{\pi(12-6\sqrt{3})}{24} = \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{4}$$

(iii) área do setor circular dado pelo círculo de centro C:

$$\text{Área}(S(C)) = \frac{\pi \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi(-1+\sqrt{3})^2}{16} = \frac{\pi(4-2\sqrt{3})}{16} = \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{8}$$

(iv) área do triângulo ABC :

$$\text{Área}(T) = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área da região R é dada por

$$\text{Área}(R) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi(2+\sqrt{3})}{24} - \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{4} - \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$



Questão 3 (Valor: 2,5 pontos)

Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ a curva de equação $y = 4x^3 - 3x$.

a) Qual é a interseção de Γ com a reta vertical de equação $x = 1$?

Se $x=1$, então $y = 4(1)^3 - 3(1) = 4 - 3 = 1$. Logo, a interseção é o ponto $(1,1)$.

b) Considere a reta r_{-1} , que passa pelo ponto $(1,1)$, tem coeficiente angular -1 e, portanto, equação $(y - 1) = (-1)(x-1)$. Qual é a interseção de Γ com a reta r_{-1} ?

$$r_{-1}: y-1=(-1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-x+1 \Leftrightarrow y=-x+2$$

$$\text{A interseção é dada por } 4x^3 - 3x = -x + 2 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x - 2 = 0$$

Note que $(1,1)$ pertence à interseção, isto é, $x=1$ é solução da equação $4x^3 - 2x - 2 = 0$.

Então,

$$4x^3 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 4x^2 + 4x + 2 = 0$$

Mas, $\Delta = (4)^2 - 4(4)(2) = 16 - 32 = -16 < 0$, ou seja, $4x^2 + 4x + 2 = 0$ não possui solução real.

Portanto, o único ponto de interseção é $(1,1)$.

(Continua)

Questão 3 (continuação)

c) Considere a reta r_m , que passa pelo ponto $(1,1)$ e tem coeficiente angular m . Quantos pontos de interseção distintos existem entre a curva Γ e a reta r_m ?

Sua resposta deve ser dada em função de m e, se necessário, dividida em casos.

$$r_m: y-1=m(x-1) \Leftrightarrow y-1=mx-m \Leftrightarrow y=mx-m+1$$

A interseção é dada por

$$4x^3 - 3x = mx - m + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - mx = -m + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - (m + 3)x + (m - 1) = 0$$

Note que $(1,1)$ pertence à interseção, isto é, $x=1$ é solução da equação

$$4x^3 - (m + 3)x + (m - 1) = 0$$

Então,

$$4x^3 - (m + 3)x + (m - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 4x^2 + 4x + 1 - m = 0$$

Mas,

$$\Delta = (4)^2 - 4(4)(1 - m) = 16 - 16(1 - m) = 16 - 16 + 16m = 16m$$

e

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16m}}{2(4)} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{m}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{m}}{2}$$

Logo:

(i) se $m < 0$, então $(1,1)$ é o único ponto de interseção

(ii) se $m = 0$, então temos dois pontos de interseção distintos: $(1,1)$ e $(-1/2, 1)$

(iii) se $m > 0$, então temos dois casos a analisar:

(iii.1) $x=1$ também é solução de $4x^2 + 4x + 1 - m = 0$. Nesse caso, o valor de m é dado por

$$1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{m}}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{m}}{2} \Rightarrow m = 9$$

E, portanto, temos dois pontos de interseção distintos: $(1,1)$ e $(-2, -26)$

(iii.2) $x=1$ não é solução de $4x^2 + 4x + 1 - m = 0$. Nesse caso, $m \neq 9$ e, então, temos três pontos de

interseção distintos: $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{m}}{2}$, $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{m}}{2}$.



Questão 4 (Valor: 2,5 pontos)

Em uma urna, há 6 bolas vermelhas, 6 bolas amarelas, 6 bolas verdes e 6 bolas azuis.

a) Jorge tira uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja azul?

$$P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

b) Depois de repor a bola e sacudir a urna, Jorge tira duas bolas ao acaso. Qual é a probabilidade de que elas sejam da mesma cor?

$$P = \frac{4 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{24}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{6!}{2!4!}}{\frac{24!}{2!22!}} = \frac{4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{24 \cdot 23}{2}} = \frac{24 \cdot 5}{24 \cdot 23} = \frac{5}{23}$$

c) Depois de repor as bolas e sacudir a urna, Jorge vai tirar uma bola de cada vez até ter tirado pelo menos uma de cada cor e, então, ele vai parar e contar as bolas que tirou. Assim, qual é a probabilidade de que ele tire exatamente 5 bolas?

Note que, ao retirar a quarta bola, temos que ter a seguinte configuração de cores de bolas retiradas:

2 bolas com mesma cor, 1 bola com cor diferente da anterior e 1 bola com cor diferente das bolas anteriores.

Além disso, a quinta bola tem que ter obrigatoriamente cor diferente das bolas anteriores. Então, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{12 \cdot \binom{6}{2} \cdot 6 \cdot 6}{\binom{24}{4}} \cdot \frac{6}{20} = \frac{324}{1771}$$

